



TITLE:

$\mathbb{Q}$ -モチーフについて  
(代数的整数論とその周辺)

AUTHOR(S):

山内, 卓也

---

CITATION:

山内, 卓也.  $\mathbb{Q}$ -モチーフについて(代数的整数論とその周辺). 数理解析研究所講究録 2006, 1521: 99-107

ISSUE DATE:

2006-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/58791>

RIGHT:

## Q-モチーフについて

広島大学大学院理学研究科 山内 卓也<sup>1</sup> (Takuya Yamauchi),  
Department of Mathematics, Hiroshima University

### 1 序文

代数体上の楕円曲線  $E$  は自身とそのすべてのガロア共役が  $\overline{\mathbb{Q}}$  上同種であるとき  $\mathbb{Q}$ -曲線と呼ばれる. K. Ribet は [15] において  $\mathbb{Q}$ -曲線の基本的性質を解明し、そしてすべての  $\mathbb{Q}$ -曲線はモジュラーであることを予想した. 実際、Serre 予想を仮定すればその主張は正しい. 本稿の目的は  $\mathbb{Q}$ -曲線概念をモチーフに拡張し、その基本的性質を調べることである.

アーベル多様体への一般化は既に E. Pyle [14] により実行されていることを注意しておく.

### 2 $\mathbb{Q}$ -曲線

この節では  $\mathbb{Q}$ -曲線の定義、及び知られている事実を簡単に復習する. 以下、アーベル多様体  $A, B$  に対してそれらが体  $K$  上同種であるとき、 $A \stackrel{K}{\sim} B$  と書くことにする.

**定義 2.1** ([15]).  $E/K$  を代数体  $K$  上の楕円曲線とする. このとき  $E$  が  $\mathbb{Q}$ -曲線であるとは次を満たすときを言う: 任意の  $\sigma \in G_{\mathbb{Q}} = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  に対して、 $\sigma E \stackrel{\mathbb{Q}}{\sim} E$ .

$E$  が虚数乗法を持つ場合は本質的には B. Gross の定義である [9]. さらに、この場合は志村の結果により  $E$  はモジュラーであることがわかっているのでモジュラー性問題に関しては虚数乗法を持たない場合が重要である.

代数体上のアーベル多様体に対して、それが (Ribet の意味で) モジュラーであるとはどういうことかを明確にしておく.

**定義 2.2** ([15]).  $A/K$  を代数体  $K$  上のアーベル多様体とする.  $A$  がモジュラーであるとは、 $A$  に対してあるレベル  $N$  が定まり、 $A$  はモジュラー曲線  $X_1(N)$  のヤコビ多様体  $J_1(N)$  の  $\overline{\mathbb{Q}}$ -因子と同種になっているときを言う.

Ribet は一連の研究の後に、次を予想した.

**予想 2.3** ([15]). すべての  $\mathbb{Q}$ -曲線は (定義 2.2 の意味で) モジュラーであろう.

実際、Ribet は予想を支持する次の定理を証明している.

---

<sup>1</sup> 著者は日本学術振興会から援助を受けております.

定理 2.4([15]).

- (1) すべての  $\mathbb{Q}$ -曲線はある  $GL_2$  型のアーベル多様体の  $\overline{\mathbb{Q}}$ -因子と同種. ここで、 $GL_2$  型のアーベル多様体  $A$  とは  $\mathbb{Q}$  上定義されたアーベル多様体で  $\text{End}_{\mathbb{Q}}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  が  $\mathbb{Q}$  上の次数が  $\dim(A)$  となる代数体の構造をもつものである.
- (2) Serre 予想を仮定すれば、すべての  $GL_2$  型のアーベル多様体  $A$  はモジュラーである. 即ち、ある保型形式  $f \in S_2(\Gamma_1(N))$  が存在して  $A \cong A_f$ . ここで、 $A_f$  は  $f$  に付随する志村のアーベル多様体.
- (3)  $GL_2$  型のアーベル多様体の一次元  $\overline{\mathbb{Q}}$ -単純因子は  $\mathbb{Q}$ -曲線である.

定理 2.4 の (1) と (2) から Serre 予想を仮定すれば予想 2.3 が従う.

志村の結果と定理 2.4 から次の三つの対象が (完全な一対一の対応ではないが) 結びつくことになる.

- (A)  $\mathbb{Q}$ -曲線.
- (B)  $GL_2$  型のアーベル多様体の一次元  $\overline{\mathbb{Q}}$ -単純因子.
- (C) 重さ 2 の保型形式.

### 3 $\mathbb{Q}$ -モチーフと $GL_2$ 型のモチーフ

この節では本題にある  $\mathbb{Q}$ -モチーフの定義とそれに付随して出てくる  $GL_2$  型のモチーフの定義を与える. その精神は Ribet の結果 [15] に基づく.

以下、単にモチーフと言えは絶対ホッジサイクルを用いて定義された圏  $\mathcal{M}_{\text{AHC}}$  (cf. [3], [13]) の対象を意味する. さらに、絶対ホッジサイクルは代数的サイクルであると仮定する (この仮定はホッジ予想から従う). このとき代数体上のモチーフ  $M$  に対して、 $K$  を含む体  $L$  上定義された  $M$  の自己準同型達の成す環  $\text{End}_L(M)$  が定義され、特に  $\text{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  は半単純環である.

先ず、 $\mathbb{Q}$ -モチーフの定義を述べる.

定義 3.1.  $\mathbb{Q}$ -モチーフを代数体上定義されたモチーフ  $N$  で次の性質を満たすものとして定義する:

- (1)  $N$  のホッジタイプは次の形  $(p, q) + (q, p)$ ,  $p > q$ .
- (2)  $\mathfrak{X} := \text{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(N) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  は総実代数体  $F$  上中心的な単純環でそのシューア指数  $t := \sqrt{\dim_F(\mathfrak{X})}$  は 1 又は 2、さらに  $2t[F : \mathbb{Q}] = \text{rank}(N)$  を満たす.
- (3) 各  $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$  に対して、ある非自明な同種 (擬同型)  $\mu_{\sigma} : {}^{\sigma}N \rightarrow N$  が存在し、すべての  $\phi \in \text{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(N) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  に対して、 $\mu_{\sigma} \circ {}^{\sigma}\phi = \phi \circ \mu_{\sigma}$  を満たす.

続いて、 $GL_2$  型のモチーフの定義を述べる.

**定義 3.2.**  $GL_2$  型のモチーフとは  $\mathbb{Q}$  上定義されたモチーフ  $M$  で次を満たすものとして定義する:

- (1)  $M$  はホッジタイプ  $(p, q) + (q, p)$ ,  $p > q$  を持つ.
- (2)  $\text{End}_{\mathbb{Q}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  は次数  $\frac{1}{2}\text{rank}(M)$  の代数体の構造を持つ.

上の定義 3.2 の (1) より、 $\text{rank}(N)$  は偶数になる. また、 $\text{rank}(M)$  はベッチ実現、エタール実現、又はホッジ実現のいずれかの次元で定義する.

Scholl のモチーフ  $M_f$  ([16]) は  $\mathcal{M}_{\text{AHC}}$  の中で再構成されており ([10]),  $M_f$  は  $GL_2$  型のモチーフとなっている. 従って、Grothendieck モチーフの圏ではなく、圏  $\mathcal{M}_{\text{AHC}}$  の上で考えることはそれなりに意味があると思われる.

最後に、モチーフに対する虚数乗法を次のように定義する.

**定義 3.3.** 代数体  $K$  上のモチーフ  $M$  が  $\text{End}_{\mathbb{Q}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  が次数  $\text{rank}(M)$  の代数体の構造をもつとき  $M$  は虚数乗法を持つという.

モチーフに対する虚数乗法は本来ならモチーフの  $\mathbb{Q}$ -ホッジ構造から定まるホッジ群を用いて定義するべきである. しかし、本稿及び [22] では天下りな定義を採用した. ホッジ予想を仮定すれば定義 3.3 はモチーフのホッジ群がアーベルであることと同値である.

$\mathbb{Q}$ -モチーフは定義から自動的に虚数乗法を持たないことを注意しておく.

## 4 主定理

$\mathbb{Q}$ -曲線に対する Ribet の結果の類似が  $\mathbb{Q}$ -モチーフに対しても成立する.

以下、

- (\*) すべての絶対ホッジサイクルは代数的サイクルを仮定する.

**定理 4.1.**

- (1) すべての  $\mathbb{Q}$ -モチーフはある  $GL_2$  型のモチーフの  $\overline{\mathbb{Q}}$ -因子と同種.
- (2) Serre 予想と有限体及び代数体上の Tate 予想を仮定すれば、すべての  $GL_2$  型のモチーフ  $M$  はモジュラーである. 即ち、ある重さ  $k$  の保型形式  $f \in S_k(\Gamma_1(N))$  が存在して  $M \cong M_f$ . ここで、 $M_f$  は  $f$  に付随する Scholl のモジュラーモチーフ.
- (3) 虚数乗法を持たない  $GL_2$  型のモチーフの  $\overline{\mathbb{Q}}$ -単純因子は  $\mathbb{Q}$ -モチーフである.

定理 4.1 の (1) と (2) から Serre 予想と有限体及び代数体上の Tate 予想を仮定すればすべての  $\mathbb{Q}$ -モチーフはモジュラーであることがわかる. ここで、代数体上のモチーフ  $N$  がモジュラーであるとは  $N$  が  $W_1(N) := W_N^{\Gamma_N}$  の  $\overline{\mathbb{Q}}$ -因子と同種になっているときを言う ( $W_1(N)$  に関しては [2] の p.9 を見よ).

定理 4.1 から次の三つの対象が (完全な一対一の対応ではないが) 結びつくことになる.

- (A)  $\mathbb{Q}$ -モチーフ.
- (B) 虚数乗法を持たない  $GL_2$  型のモチーフの  $\overline{\mathbb{Q}}$ -単純因子.
- (C) 重さが 2 以上の保型形式.

## 4.1 主定理の証明

以下では定理 4.1 の証明を概観する.

先ず、定理 4.1-(2) を証明する.

$M$  を  $GL_2$  型のモチーフとし、 $E := \text{End}_{\mathbb{Q}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  とおく.  $l$  を素数とし、 $l$  の上にある  $E$  の (有限) 素点を  $\lambda$  とする. このとき、 $M$  に付随する  $\lambda$ -進表現が以下の合成射として定義される:

$$\rho_{\lambda}: G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_{E \otimes \mathbb{Q}_l}(H_{et}(M)) \simeq \prod_{\lambda|l} GL_2(E_{\lambda}) \longrightarrow GL_2(E_{\lambda}).$$

また、定数  $B = B(M)$  を任意の素数  $l \geq B$  に対して  $H_{et}(M, \mathbb{Z}_l)$  が自由  $\mathbb{Z}_l$  加群となるようにとる.

一方、同種写像による取り換えにより  $\text{End}_{\mathbb{Q}}(M)$  は  $E$  の整数環  $\mathcal{O}_E$  として良い. このとき、 $l \geq B$  と  $\lambda|l$  に対して、 $M$  に付随する法  $\lambda$ -表現が以下の合成射として定義される:

$$\overline{\rho}_{\lambda}: G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_{\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_l}(H_{et}(M, \mathbb{Z}_l)) \simeq \prod_{\lambda|l} GL_2(\mathcal{O}_{E_{\lambda}}) \longrightarrow GL_2(\mathbb{F}_{\lambda}), \quad \mathbb{F}_{\lambda} = \mathcal{O}_{E_{\lambda}} / \lambda \mathcal{O}_{E_{\lambda}}.$$

このとき、 $\overline{\rho}_{\lambda}$  は奇な表現となる. さらに、 $M$  のホッジ型を  $(p, q) + (q, p)$ ,  $p > q$  とするとき、十分大きなノルムをもつ  $\lambda$  に対して  $\overline{\rho}_{\lambda}$  の重さは  $k_{\lambda} = p - q + 1$  となり、レベルは  $\lambda$  を動かすとき有界である (レベルと重さに関しては [17] を見よ). モチーフの重さを一つとめて考えるとき、 $\lambda$  のノルムが十分大きくとれば、Fontaine-Laffaille 理論 [6] と  $p$  進ホッジ理論 ([4], [21]) から重さが決定できる.

$M$  に対して、集合  $\Lambda$  を次の条件を満たす  $E$  の有限素点  $\lambda$  の集まりとして定める:

- (0)  $\lambda$  の下にある有理素数  $l$  は  $l \geq B = B(M)$  を満たす.
- (1) 上記 (0) の  $\lambda$  に対して、 $\overline{\rho}_{\lambda}$  は絶対既約.
- (2)  $\lambda$  は奇 (i.e.  $\lambda \nmid 2$ ) かつ  $E$  において完全分解する.
- (3)  $\lambda$  は  $M$  の (Artin) 導手と  $E$  の判別式を割らない.
- (4)  $\lambda$  の下にある有理素数  $l$  に対して  $\text{End}_{\mathbb{Q}}(M) \otimes \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$  は半単純加群.

5 節の Tate 予想を仮定すると  $\Lambda$  は (可算) 無限集合となる.

Tate 捻りにより、 $M$  はホッジ型  $(p, 0) + (0, p)$  を持つとしてよい. ノルムが十分大きな  $\lambda \in \Lambda$  をとる.  $\lambda \in \Lambda$  を動かしたとき  $\overline{\rho}_{\lambda}$  から定まるレベル  $N_{\lambda}$  が割る自然数を  $N$  とおく.

このとき、Serre 予想を仮定すると、ある保型形式  $S_{p+1}(\Gamma_1(N))$  が存在して

$$\overline{\rho}_{\lambda} \simeq \rho_f \bmod \lambda,$$

となる. このような  $f \in S_{p+1}(\Gamma_1(N))$  は有限個ある. このとき上記の  $f$  を一つ固定すると、 $\bar{\rho}_\lambda \simeq \rho_f \bmod \lambda$  なる  $\lambda \in \Lambda$  が無限個取れる.

$R$  を  $\mathbb{Q}(a_n(f)|(n, N) = 1)$  の整数環とし、環準同型  $\phi_\lambda : R \ni a_p \rightarrow \text{trace}(\bar{\rho}_\lambda(\text{Frob}_p)) \in \bar{\mathbb{F}}_\lambda, (p, lN) = 1, \lambda|l$  を定める. このとき、チェボタレフの密度定理より

$\bar{\mathbb{F}}_\lambda[G_{\mathbb{Q}}]$ -加群としての同型、

$$(H_{\text{et}}(M_f, \mathbb{Z}_l)/lH_{\text{et}}(M_f, \mathbb{Z}_l)) \otimes_{R/lR, \phi_\lambda} \bar{\mathbb{F}}_\lambda \simeq (H_{\text{et}}(M, \mathbb{Z}_l)/\lambda H_{\text{et}}(M, \mathbb{Z}_l)) \otimes_{\mathbb{F}_\lambda} \bar{\mathbb{F}}_\lambda,$$

を得る.

ここで、 $\bar{V}_M = H_{\text{et}}(M, \mathbb{Z}_l)/lH_{\text{et}}(M, \mathbb{Z}_l)$ 、 $\bar{V}_{M_f} := H_{\text{et}}(M_f, \mathbb{Z}_l)/lH_{\text{et}}(M_f, \mathbb{Z}_l)$  とおく. 今  $\lambda \in \Lambda$  なので  $\bar{\mathbb{F}}_\lambda = \bar{\mathbb{F}}_l$ . 上の同型の左側は  $\bar{V}_{M_f}$  のガロア加群としての商だから、

$$\text{Hom}_{G_{\mathbb{Q}}}(\bar{V}_{M_f}, (H_{\text{et}}(M, \mathbb{Z}_l)/\lambda H_{\text{et}}(M, \mathbb{Z}_l))) \neq 0,$$

を得る. 特に、

$$\text{Hom}_{G_{\mathbb{Q}}}(\bar{V}_{M_f}, \bar{V}_M) \neq 0,$$

が成立する.

他方、Tate 予想の (d) と再交換団理論 [1] から十分大きな  $l$  に対して、自然な射

$$\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(M_f, M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \longrightarrow \text{Hom}_{G_{\mathbb{Q}}}(\bar{V}_{M_f}, \bar{V}_M)$$

は全射.  $\Lambda$  は無限集合なので、上記の性質を満たすような  $\lambda \in \Lambda, \lambda|l$  を予め選んでおけば、 $\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(M_f, M) \neq 0$  が分るので、再び (代数体上の) Tate 予想から  $M_f \simeq M$  を得る.

定理 4.1-(1) 及び (3) に関しては証明のスケッチを述べるにとどめる事にする.

先ず、(1) について解説する.

$N$  を  $\mathbb{Q}$ -モチーフとする. 定義から  $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$  に対して、同種  $\mu_\sigma : {}^\sigma N \rightarrow N$  が存在するので、次のように  $G_{\mathbb{Q}}$  上の 2-コサイクル  $c : G_{\mathbb{Q}} \times G_{\mathbb{Q}} \rightarrow F^*$  が定まる:

$$c(\sigma, \tau) := \mu_\sigma \circ {}^\sigma \mu_\tau \circ \mu_{\sigma\tau}^{-1}.$$

$c$  が  $\text{End}_{\bar{\mathbb{Q}}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  の中心  $F := Z(\text{End}_{\bar{\mathbb{Q}}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$  に値を持つことは、各  $\mu_\sigma$  がすべての  $\text{End}_{\bar{\mathbb{Q}}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  の元  $\phi$  に対して、 $\mu_\sigma \circ {}^\sigma \phi = \phi \circ \mu_\sigma$  なるように選べることから従う.

2-コサイクル  $c$  から付随する代数体を以下のように構成する. 結論を言うと、この代数体の整環を自己同型環として備え、かつ  $N$  を  $\bar{\mathbb{Q}}$ -因子として含む  $GL_2$  型のモチーフが構成される. 一般に、 $H^2(G_{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}) = 0$  ([18]) が成立することから、埋め込み  $F \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}$  を固定するとき、局所定数関数

$$\beta : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}^*,$$

で  $c(\sigma, \tau) = \beta(\sigma) \cdot \beta(\tau) \cdot \beta(\sigma\tau)^{-1}$  を満たすものが存在する. そこで、 $E = F(\beta(\sigma) | \sigma \in G_{\mathbb{Q}})$  とおく.  $\beta$  は局所定数関数なので  $E$  は  $F$  の有限次拡大となる.

ここで、次の可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc}
 H^2(G_{\mathbb{Q}}, F^*) & \longrightarrow & H^2(G_{\mathbb{Q}}, (\overline{\mathbb{Q}} \otimes F)^*) & \longrightarrow & \mathrm{Br}(F) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow E \otimes_F * \\
 H^2(G_{\mathbb{Q}}, E^*) & \longrightarrow & H^2(G_{\mathbb{Q}}, (\overline{\mathbb{Q}} \otimes E)^*) & \longrightarrow & \mathrm{Br}(E).
 \end{array}$$

2-コサイクル  $c$  の類  $[c]$  は  $\mathrm{Br}(F)$  の中で、 $[\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(N) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}]$  と一致することがわかる. 他方、 $H^2(G_{\mathbb{Q}}, E^*)$  においては  $[c]$  は自明になるので、図式を追うことで、 $\mathrm{Br}(E)$  において  $[E \otimes_F (\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(N) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})] = 0$  がわかる. これより、 $E \otimes_F (\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(N) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = M_t(E)$  を得る. ここで、 $t$  は  $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(N) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  のシューア指数. また [14] の方法を真似ることで、 $\mathbb{Q}$  上定義されたモチーフ  $N_0$  が存在して、 $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(N_0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = E \otimes_F (\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(N) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$  が成り立つことがわかる. 詳しくは述べないが、 $N_0$  は  $N$  の Weil restriction のある部分因子として定義される.

$e$  を  $M_t(E)$  の直交冪等元とすると、 $M = e(N_0)$  は  $N$  を  $\overline{\mathbb{Q}}$ -単純因子として含み、かつ  $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = E$  を満たす  $\mathrm{GL}_2$  型のモチーフである.

最後に定理 4.1-(3) であるが、これは虚数乗法を持たない  $\mathrm{GL}_2$  型のモチーフ  $M$  はある  $\overline{\mathbb{Q}}$ -単純因子  $N$  があって、 $M \cong N^n$  の形に分解されることと、 $M$  が  $\mathbb{Q}$  上定義されていることを使えば簡単に従う.

## 5 Serre 予想と Tate 予想

定理 4.1 を証明する際に、重要な役割を果たす Serre 予想と Tate 予想について簡単に解説する.

Serre 予想の主張は大変明快である. それ故に応用上非常に強力なものである:

**Serre 予想** ([17]).  $p$  を奇素数とし、 $\overline{\mathbb{F}}_p$  を有限体  $\mathbb{F}_p$  の代数閉体とする. このとき、奇かつ既約な二次元 (連続) ガロア表現  $\bar{\rho}: G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$  はモジュラー、即ち、ある保型形式  $f$  が存在して、 $\bar{\rho} \simeq \rho_f \bmod p$ .

以下に述べる Tate 予想はアーベル多様体の場合は既に証明されていることを注意しておく (cf. [5], [20]).

代数体  $K$  上のモチーフ  $N$  と素数  $l$  に対して、

$$\rho_l: G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \rightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{Z}_l}(H_{\mathrm{et}}(N, \mathbb{Z}_l)),$$

を  $N$  に付随する  $l$ -進ガロア表現とする.

**Tate 予想** ([19]).  $N$  及び  $M$  を代数体  $K$  上のモチーフとし、共に重さは等しいとする。正の定数  $B$  を、 $l \geq B$  なるすべての素数に対して、 $H_{\text{et}}(N, \mathbb{Z}_l)$  及び  $H_{\text{et}}(M, \mathbb{Z}_l)$  が自由  $\mathbb{Z}_l$ -加群と成るように定める (比較定理を用いればそのような定数  $B$  はいつでも取れる)。

このとき、次が成立する:

- (a)  $H_{\text{et}}(N, \mathbb{Z}_l)$  は半単純  $G_K$ -加群
- (b) 自然な射  $\alpha_K : \text{Hom}_K(N, M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l \rightarrow \text{Hom}_{G_K}(H_{\text{et}}(N, \mathbb{Z}_l), H_{\text{et}}(M, \mathbb{Z}_l))$  は同型。
- (c) 有限個を除くすべての  $l \geq B$  に対して、 $\text{End}_{\mathbb{Z}_l}(H_{\text{et}}(M, \mathbb{Z}_l))$  の部分代数  $\mathbb{Z}_l[\rho_l(G_K)]$  は自然な射  $\beta_K : \text{End}_K(M) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}_l}(H_{\text{et}}(M, \mathbb{Z}_l))$  の像の full commutator と一致。
- (d)  $l \geq B$  に対して、 $\bar{\rho}_l$  を  $\rho_l$  の法  $l$  による還元とする。このとき、有限個を除くすべての  $l \geq B$  に対して、 $\text{End}_{\mathbb{F}_l}(H_{\text{et}}(M, \mathbb{Z}_l)/lH_{\text{et}}(M, \mathbb{Z}_l))$  の部分代数  $\mathbb{F}_l[\bar{\rho}_l(G_K)]$  は自然な射  $\text{End}_K(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}_l}(H_{\text{et}}(M, \mathbb{Z}_l)/lH_{\text{et}}(M, \mathbb{Z}_l))$  の像の full commutator と一致。

## 6 例

この節では  $\text{GL}_2$  型のモチーフ及び  $\mathbb{Q}$ -モチーフの具体例を紹介する。定理 4.1 から  $\mathbb{Q}$ -モチーフは  $\text{GL}_2$  型のモチーフの単純因子と同種になっているので取り敢えず  $\text{GL}_2$  型のモチーフを構成すればよいことがわかる。もちろん、直接的に  $\mathbb{Q}$ -モチーフを構成することは重要ではあるが大変難しい。

数十年前から高次元多様体、特にカラビ・ヤウ多様体に付随するモチーフからランクが 2 の部分モチーフを構成する動きはあったが、最近ではこの動きはさらに活発になった。それに伴って様々な分野の研究者がモチーフ的  $L$  関数と保型  $L$  関数が一致する具体例を散発的ではあるが計算している。それらの例は辞書的文献 [11] にほとんど載っているので参照して頂きたい。

この節では次のリジッドな三次元カラビ・ヤウ多様体を考える。平方因子を含まない整数  $D$  に対して

$$Y_D : x + \frac{D}{x} + y + \frac{D}{y} + z + \frac{D}{z} + w + \frac{D}{w} = 0,$$

とおく。  $X_D$  を [7] に習って構成された  $Y_D$  の非特異な射影的モデルとする。このとき、 $X_D$  はリジッドな三次元カラビ・ヤウ多様体となり、モチーフ  $M_D := (X_D, \Delta_3)$  は  $\text{GL}_2$  型のモチーフであることがわかる ( $X_D$  はチャウ-キネス分解を持つので (cf. [8])、その 3 番目の成分を  $\Delta_3$  とおいた)。さらに次が成立する:

- (1) すべての奇素数  $p$  に対して、

$$\text{trace}(\text{Frob}_p | H_{\text{et}}(M_D)) = p^3 - 2p^2 - 3p(\chi_D(p) - 1) - 7 - \#Y_D(\mathbb{F}_p),$$



ここで、 $\chi_D$  は二次体  $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$  に付随する二次指標.

(2) すべての奇素数  $p$  に対して、

$$\text{trace}(\text{Frob}_p | H_{\text{et}}(M_D)) = \chi_D(p) \cdot b_p,$$

ここで、 $\eta(2z)^4 \eta(4z)^4 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{2\pi\sqrt{-1}nz} \in S_4(\Gamma_0(8))$ .

(3)  $M_D$  は (定義 3.3 の意味で) 虚数乗法はもたない.

(1) と (2) に関しては [7] をみれば直ぐにわかることである. (3) はホッジ群と  $l$ -進ガロア表現に関する若干の議論からわかる.

最後に、二次体上定義された重さ 1 の  $\mathbb{Q}$ -モチーフ、即ち、Building block の例を与える. これらは [23] で得られた例である.

(a)  $C_1: y^2 = x^6 - 2(-1 + \sqrt{5})x^5 + 10(-2 + \sqrt{5})x^3 - 2(-11 + 15\sqrt{5})x - 41 + 6\sqrt{5}$ .

$\text{Res}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})/\mathbb{Q}} J(C_1)$  は  $J_0(125)$  の 4 次元  $\mathbb{Q}$ -単純因子.

(b)  $C_2: y^2 = x^5 + 3\sqrt{2}x^4 - 4x^3 - 12\sqrt{2}x^2 - 12x + 28\sqrt{2}$ .

$\text{Res}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}} J(C_2)$  は  $J_0(512)$  の 4 次元  $\mathbb{Q}$ -単純因子.

(c)  $C_3: y^2 = x^6 - 5(1 + \sqrt{5})x^3 + 12\sqrt{5}x + \frac{5}{2}(3 + \sqrt{5})$ .

$\text{Res}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})/\mathbb{Q}} J(C_3)$  は  $J_0(1125)$  の 4 次元  $\mathbb{Q}$ -単純因子.

(d)  $C_4: y^2 = 4x^5 - 12x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 8(-5 + 2\sqrt{2})x - 8(-3 + 2\sqrt{2})$ .

$\text{Res}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}} J(C_4)$  は  $J_0(1792)$  の 4 次元  $\mathbb{Q}$ -単純因子.

次の例は Building block ではないが、虚数乗法をもつ二次体上で単純かつモジュラーな例である. 村林の結果 [12] に対する良い例を与えているのではないと思われる.

(e)  $C_5: y^2 = 4x^5 - 8(-1 + \sqrt{2})x$ .

$\text{Res}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}} J(C_5)$  は  $J_0(2048)$  の 4 次元  $\mathbb{Q}$ -単純因子であり、 $\mathbb{Q}(\zeta_8)$  上で  $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$  を虚数乗法を持つ楕円曲線の 4 つの積と同種.

## REFERENCES

- [1] N. Bourbaki, Algèbra, chap.8, Paris 1958.
- [2] A. Brown and E. Ghata, Endomorphisms algebras of modular motives attached to elliptic modular forms, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 53 (2003), no. 6, 1615–1676.
- [3] P. Deligne, Hodge cycles, Hodge cycles, motives, and Shimura varieties, Lecture Notes in Mathematics, 900.
- [4] G. Faltings,  $p$ -adic Hodge theory. J. Amer. Math. Soc. 1 (1988), no. 1, 255–299.
- [5] G. Faltings and G. Wüstholz et al, Rational points, Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1992.

- [6] J. Fontaine and G. Laffaille, Construction de représentations  $p$ -adiques. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (4) 15 (1982), no. 4, 547–608 (1983).
- [7] B. van Geemen and N.O. Nygaard, On the Geometry and arithmetic of some siegel modular threefolds, *J. Number Theory* 53 (1995), no. 1, 45–87.
- [8] B. Gordon and J. Murre, Chow motives of elliptic modular threefolds. *J. Reine Angew. Math.* 514 (1999), 145–164.
- [9] B. Gross, Arithmetic on elliptic curves with complex multiplication. With an appendix by B. Mazur. *Lecture Notes in Mathematics*, 776. Springer, Berlin, 1980.
- [10] U. Jannsen, Mixed motives and algebraic  $K$ -theory. With appendices by S. Bloch and C. Schoen. *Lecture Notes in Mathematics*, 1400. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [11] C. Meyer, Modular Calabi-Yau threefolds. *Fields Institute Monographs*, 22.
- [12] N. Murabayashi, On the field of definition for modularity of CM elliptic curves, 数理解析研究所講究録. No 1376, p.72-84.
- [13] A. Panchishkin, Motives for absolute Hodge cycles, *Proceedings of the Joint. AMS Summer Conference on Motives*, Seattle, July 20-August 2 1991, Seattle, Providence, RI, 1994, vol.1, 461–483.
- [14] E. Pyle, Abelian varieties over  $\mathbb{Q}$  with large endomorphism algebras and their simple components over  $\overline{\mathbb{Q}}$ . *Modular curves and abelian varieties*, 189–239, *Progr. Math.*, 224, Birkhauser, Basel, 2004.
- [15] K. Ribet, Abelian varieties over  $\mathbb{Q}$  and modular forms. *Modular curves and abelian varieties*, 241–261, *Progr. Math.*, 224, Birkhauser, Basel, 2004.
- [16] T. Scholl, Classical motives, *Motives* (Seattle, WA, 1991), 163–187, *Proc. Sympos. Pure Math.*, 55, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [17] J-P. Serre, Sur les représentations modulaires de degré 2 de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ , *Duke. Math J.* (1) 54 (1987), 179–230.
- [18] J-P. Serre, Modular forms of weight one and Galois representations, *Algebraic Number Fields* (*Proc. Sympos. Univ. Durham*, Durham, 1975) ed. A. Frohlich, Academic Press, London, 1977, pp.193–268.
- [19] J-P. Serre, Propriétés conjecturales des groupes de Galois motiviques et des représentations  $l$ -adiques, *Motives* (Seattle, WA, 1991), 377–400, *Proc. Sympos. Pure Math.*, 55, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [20] J. Tate, Endomorphisms of abelian varieties over finite fields. *Invent. Math.* 2 1966 134–144.
- [21] T. Tsuji,  $p$ -adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case. *Invent. Math.* 137 (1999), no. 2, 233–411.
- [22] T. Yamauchi,  $\mathbb{Q}$ -motives and modular forms, preprint (2005).
- [23] T. Yamauchi, Modular curves of genus 2 over quadratic fields, preprint (2006).

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Hiroshima University, Higashihiroshima 739-8526 Japan.

E-mail: yamauchi@math.sci.hiroshima-u.ac.jp